УДК 517.956

В. В. Городецкий, И. В. Житарюк

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматриваются ультрапараболические уравнения высокого порядка, вырождающиеся по двум группам переменных. Устанавливается однозначная разрешимость задачи Коши в полупространстве $t > 0$ для таких уравнений в классах обобщенных функций бесконечного порядка типа $(S_\alpha^\beta)'$. Найдено достаточное (а для уравнений специального вида и необходимое) условие стабилизации решения задачи Коши в таких пространствах. Рассмотрен также вопрос о равномерной (на каждом компакте) стабилизации решения к нулю.

1. Рассмотрим уравнение вида

$$\left(D_t^1 - \sum_{i=1}^{n} (x_i D_{y_i}^1 + y_i D_{z_i}^1) - \sum_{|k| \leqslant 2b} a_k(t) D_x^k\right) u(t, x, y, z) = 0, \tag{1}$$

где $\{x, y, z\} \subset \mathbb{R}^n$, $(t, x, y, z) \in \Pi_{(t_0, +\infty)} \equiv (t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^{3n}$, $0 \leqslant t_0 < +\infty$ — фиксированное число, $D_t^1 \equiv \frac{\partial}{\partial t}$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|k| \equiv k_1 + \cdots + k_n$, $D_x^k \equiv D_{x_1}^{k_1} \ldots D_{x_n}^{k_n}$, коэффициенты $a_k: [t_0, +\infty) \to \mathbb{C}$, $|k| \leqslant 2b$, являются непрерывными ограниченными функциями и такими, что оператор $D_t^1 - \sum_{|k| \leqslant 2b} a_k(t) D_x^k$ — равномерно параболический по Петровскому [1] в каждой полосе $\Pi_{[t_0, T]} \equiv [t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n}$, $T > t_0$.

Уравнение (1) является вырожденным в том смысле, что в нем отсутствуют производные высшего порядка от неизвестной функции u по y и z (вырождение по двум группам переменных). Это уравнение принадлежит к классу ультрапараболических и обобщает известное уравнение диффузии с инер ией, которое впервые рассмотрел А. Н. Колмогоров в связи с изучением случайных движений. Вопрос о стабилизации решений задачи Коши дл уравнений вида (1) (т. е. существование у решения $u(t, x, y, z)$ при $t \to +\infty$ определенного предела, понимаемого в том или ином смысле) в классе обычных начальных функций рассматривался в работе [2]. Здесь исследуется стабилизация решений задачи Коши для (1) в классах обобщенных функций бесконечного порядка типа ультрараспределений Жевре.

2. Будем говорить, следуя [2], что фундаментальное решение (ф. р.) $Z(t, X; \tau, \Phi)$, $t_0 \leqslant \tau < t < +\infty$, $\{X = (x, y, z), \ \Phi = (\xi, \eta, \zeta)\} \subset \mathbb{R}^{3n}$, уравнения (1) удовлетворяет условию Λ_β^+, $0 < \beta < 1$, если при каждом

$t > \tau$

$$\exists A_i > 0 \quad \exists B_i > 0 \quad \exists C_i > 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\exists c > 0 \quad \exists c_0 > 0 \quad \forall \{k, p, m\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \quad \{X, \Phi\} \subset \mathbb{R}^{3n};$$

$$|D_x^k D_y^p D_z^m Z(t, X; \tau, \Phi)| \leqslant c \prod_{i=1}^{n} A_i^{k_i} B_i^{p_i} C_i^{m_i} k_i^{k_i\beta} p_i^{p_i\beta} m_i^{m_i\beta} [a(t, \tau)]^{-s} \times$$

$$\times \exp\{-c_0 \rho(a(t, \tau), X, \Phi)\},$$

где $s = (6b + 3)n + |k| + (2b + 1)|p| + (4b + 1)|m|$, $a(t, \tau)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция аргумента $t - \tau$, $a(\tau, \tau) = 0$,

$$\rho(a(t, \tau), X, \Phi) = \left(\frac{|x - \xi|}{a(t, \tau)}\right)^q + \left(\frac{|y - \eta + (t - \tau)x|}{a(t, \tau)(t - \tau)}\right)^q +$$

$$+ \left(\frac{\left|z - \zeta + (t - \tau)y + \frac{1}{2}(t - \tau)^2 x\right|}{a(t, \tau)(t - \tau)^2}\right)^q, \quad \{X, \Phi\} \subset \mathbb{R}^{3n},$$

$$q = 2b/(2b - 1), \quad 1/q + \beta \geqslant 1.$$

Условию Λ_β^+ с $\beta = 1/2b$ и функцией $a(t, \tau) = (t - \tau)^{1/2b}$ удовлетворяет, например, ф. р. уравнения вида (1) с постоянными коэффициентами, содержащего только группу старших членов (т. е. $a_k \equiv \mathrm{const}$, $\forall k : |k| = 2b$). Примеры других уравнений вида (1), ф. р. которых удовлетворяют указанному условию с определенным $\beta \in (0, 1)$ и функцией $a(t, \tau)$, см. в [2].

Если ф. р. $Z(t, X; t_0, \Phi)$, $0 \leqslant t_0 < t$, удовлетворяет условию Λ_β^+, то при любых фиксированных $(t, X) \in \Pi_{(t_0, +\infty)}$ ф. р. $Z(t, X; t_0, \cdot)$ принадлежит пространству $S_{1/q, \ldots, 1/q}^{\beta, \ldots, \beta}(\mathbb{R}^{3n}) \equiv S_{1/q}^{\beta}$, которое [3] состоит из всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условиям

$$\exists c > 0 \ \exists a > 0 \ \exists L_j > 0, \quad j \in \{1, \ldots, 3n\} \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+^{3n}, \ Y \in \mathbb{R}^{3n}:$$

$$|D_Y^m \varphi(Y)| \leqslant c \prod_{j=1}^{3n} L_j^{m_j} m_j^{m_j\beta} \exp\{-a\|Y\|^q\}, \quad \|Y\| = (y_1^2 + \cdots + y_{3n}^2)^{1/2}.$$

Символом $(S_{1/q}^{\beta})'$ обозначается пространство всех линейных непрерывных функционалов над соответствующим основным пространством, а его элементы называются обобщенными функциями.

Зададим для (1) начальное условие

$$u(t, \cdot)|_{t=t_0} = f, \tag{2}$$

где $f \in (S_{1/q}^{\beta})'$.

Под решением задачи Коши (1), (2) в полупространстве $t > t_0$ будем понимать функцию $u(t, X)$, $(t, X) \in \Pi_{(t_0, +\infty)}$, дифференцируемую один раз по t, y, z и $2b$ раз по x, удовлетворяющую уравнению (1) и условию (2) в том смысле, что $u(t, \cdot) \to f$ при $t \to t_0$ в $(S_{1/q}^{\beta})'$.

С помощью результатов [2] и рассуждений, аналогичных проведенным в работе [4], доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть ф. р. уравнения (1) удовлетворяет условию Λ_β^+, $0 < \beta < 1$. Тогда задача Коши (1), (2) с начальной функцией $f \in (S_{1/q}^{\beta})'$ однозначно разрешима в полупространстве $t > t_0$. Ее решение дифференцируемо по t, бесконечно дифференцируемо по X и имеет вид

$$u(t, X) = \langle f, Z(t, X; t_0, \cdot)\rangle, \quad (t, X) \in \Pi_{(t_0, +\infty)}.$$

(Здесь $\langle f, Z(t, X; t_0, \cdot)\rangle$ обозначает действие функционала f на функцию из основного пространства.)

3. Рассмотрим однопараметрическое семейство гиперповерхностей $\Phi_t(Y) = c$, $Y \in \mathbb{R}^{3n}$, $c > 0$ (при фиксированном t, $t \geqslant t_0$), обладающее

следующими свойствами [5]: 1) оно состоит из замкнутых односвязных гиперповерхностей; 2) если $r(c, \alpha, t)$ — длина вектора, соединяющего начало координат с точкой гиперповерхности $\Phi_t(Y) = c$ и составляющего углы $\pi/2 - \alpha_j$ с осями y_{j+1}, $j \in \{1, 2, \ldots, 3n-1\}$, декартовой системы координат, то $r(c, \alpha, t)$ имеет непрерывную положительную производную по параметру c; 3) для произвольных c, α, t выполняются неравенства

$$c_1 r^{3n}(c, \alpha, t) \leqslant \operatorname{mes} V^c_{\Phi_t} \leqslant c_2 r^{3n}(c, \alpha, t),$$

где $V^c_{\Phi_t}$ — тела, ограниченные гиперповерхностями $\Phi_t(Y) = c$, c_1, c_2 — положительные постоянные. Предполагается также, что при $t \to +\infty$ семейства гиперповерхностей $\Phi_t(Y) = c$ стремятся к семейству замкнутых гиперповерхностей $F(Y) = c$, т. е. [5]

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists T = T(\varepsilon) > 0 \quad \forall t > T, \quad c > 0:$$

$$\operatorname{mes}(V^c_F \cup V^c_{\Phi_t}) / \operatorname{mes}(V^c_F \cap V^c_{\Phi_t}) < 1 + \varepsilon.$$

При этом предельное семейство гиперповерхностей $F(Y) = c$ обладает свойствами 1) — 3).

Будем говорить, что обобщенная функция $f \in (S^{\beta}_{1/q})'$ имеет обобщенное предельное среднее по телам V^c_F, равное l, и писать $M^{\infty}_F(f) = l$, если

$$\forall \varphi \in S^{\beta}_{1/q}: \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{\operatorname{mes} V^c_F} \int\limits_{V^c_F} (f * \varphi)(Y)\, dY = l \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} \varphi(Y)\, dY \tag{3}$$

(здесь $(f * \varphi)(Y) = \langle f, T_{-Y}\check{\varphi}(\cdot)\rangle$, $\check{\varphi}(Y) = \varphi(-Y)$, T_{-Y} — оператор сдвига в пространстве $S^{\beta}_{1/q}$).

Если $V^c_F = \Omega_c(Y)$ — шар радиуса c с центром в точке Y, то (3) означает, что $f \in (S^{\beta}_{1/q})'$ имеет обобщенное шаровое предельное среднее $M^{\infty}_{\Omega}(f)$, равное l (понятие обобщенного шарового предельного среднего в случае задачи Коши для уравнения теплопроводности впервые было введено Ю. Н. Дрожжиновым в [6]).

Отметим также, что если $F_1(Y) = F(Y + Y_0) = c$ — семейство гиперповерхностей, полученное смещением семейства $F(Y) = c$, то $M^{\infty}_F(f) = M^{\infty}_{F_1}(f)$. Действительно, поскольку оператор сдвига ограничен в пространстве $S^{\beta}_{1/q}$ и переводит это пространство в себя [3], то

$$\int\limits_{V^c_{F_1}} (f * \varphi)(Y)\, dY = \int\limits_{V^c_F} (f * \varphi_1)(Y)\, dY,$$

где $\varphi_1(Y) = \varphi(Y - Y_0)$, $\varphi_1 \in S^{\beta}_{1/q}$.

Если $f: \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, имеющая обычное предельное среднее $S^{\infty}_F(f) = 0$ по телам V^c_F, т. е. [5]

$$S^{\infty}_F(f) = \lim_{c \to +\infty} \Psi^c_F(Y) \equiv \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{\operatorname{mes} V^c_F} \int\limits_{V^c_{F(Y)}} f(\Lambda)\, d\Lambda,$$

то она имеет и обобщенное предельное среднее $M^{\infty}_F(f) = 0$ по телам V^c_F. Более точно, пусть $f \in C(\mathbb{R}^{3n})$ и удовлетворяет условиям

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall c > 0 \quad \exists c_{\varepsilon} > 0 \quad \exists c'_{\varepsilon} > 0: \quad |f(Y)| \leqslant c_{\varepsilon} \exp(\varepsilon \|Y\|^q),$$

$$|\Psi^c_F(Y)| \leqslant c'_{\varepsilon} \exp(\varepsilon \|Y\|^q), \quad Y \in \mathbb{R}^{3n}. \tag{4}$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\frac{1}{\operatorname{mes} V^c_F} \int\limits_{V^c_F} (f * \varphi)(\Lambda)\, d\Lambda = \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} \Psi^c_{F_1}(\Lambda)\, \varphi(\Lambda)\, d\Lambda, \quad \varphi \in S^{\beta}_{1/q} \tag{5}$$

$\left(\text{здесь } (f*\varphi)(\Lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} f(\Lambda - \Phi)\varphi(\Phi)\,d\Phi\right)$. Осуществляя в (5) предельный переход при $c \to +\infty$ под знаком интеграла (который обеспечивается условиями (4) и тем, что $\varphi \in S^{\beta}_{1/q}$), получаем $M^{\infty}_F(f) = 0$, ибо (см. [5]) из условия $S^{\infty}_F(f) = 0$ следует существование $S^{\infty}_{F_1}(f) = 0$.

Обратное утверждение неверно (соответствующий пример в случае $V^c_F = \Omega_c(0)$ см. в [6]), т. е. класс функций, имеющих обобщенное нулевое предельное среднее по телам V^c_F, шире, чем класс функций, имеющих обычное нулевое предельное среднее по этим же телам.

В данной работе нас в основном интересует вопрос о стабилизации решения задачи Коши для уравнения (1) к нулю в пространстве $(S^{\beta}_{1/q})'$, т. е. те ограничения на начальную обобщенную функцию f, при выполнении которых $\langle u(t, \cdot), \varphi\rangle \to 0$, $t \to +\infty$, для произвольной функции φ. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть ф. р. $Z(t, X; t_0, 0)$ уравнения (1) удовлетворяет условию Λ^{+}_{β} и постоянно по X на семействах гиперповерхностей $\Phi_t(X) = c$ (со свойствами 1) — 3)), стремящихся при $t \to +\infty$ к семейству гиперповерхностей $F(X) = c$. Если обобщенная функция f из пространства $(S^{\beta}_{1/q})'$ такова, что $M^{\infty}_F(f) = 0$, то решение $u(t, X)$, $(t, X) \in \Pi_{(t_0, +\infty)}$, задачи Коши (1), (2) с начальной функцией f стабилизируется при $t \to +\infty$ к нулю в $(S^{\beta}_{1/q})'$.

Поскольку теорема 2 доказывается весьма громоздко, то наметим лишь схему ее доказательства.

Основной этап доказательства состоит в установлении формулы

$$\langle u(t, \cdot), \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^{3n}} Z(t, -X; t_0, 0)(f*\check{\varphi})(X)\,dX, \quad \varphi \in S^{\beta}_{1/q}, \tag{6}$$

где $\check{\varphi}(X) = \varphi(-X)$, $\check{\varphi} \in S^{\beta}_{1/q}$. Интеграл (6) рассматривается как предел интегралов по телам $V^c_{\Phi_t}$ при $c \to +\infty$. Далее, осуществив определенную замену переменных, с помощью интегрирования по частям (учитывая, что ф. р. удовлетворяет условию Λ^{+}_{β}) придем к оценке

$$|\langle u(t, \cdot), \varphi\rangle| \leqslant c\int\limits_0^{\infty} r^{3n}\exp\{-\nu r^q\}\left|\frac{1}{\operatorname{mes} V^{a(t,t_0)r}_{\Phi_t}}\int\limits_{V^{a(t,t_0)r}_{\Phi_t}}(f*\check{\varphi})(Y)\,dY\right|dr,$$

где c, ν — некоторые положительные постоянные. Переходя теперь к пределу при $t \to +\infty$ под знаком интеграла, получаем утверждение теоремы.

Замечание. Если на начальную обобщенную функцию f наложить дополнительное условие положительности (т. е. $\langle f, \varphi\rangle \geqslant 0$ для произвольной неотрицательной основной функции φ), то характер тел, по которым предполагается существование обобщенного предельного среднего, безразличен. В частности, в качестве таких тел можно брать шары с центром в начале координат.

Для некоторых ультрапараболических уравнений вида (1) существование в классе положительных обобщенных функций нулевого обобщенного шарового предельного среднего является не только достаточным, но и необходимым условием стабилизации решения задачи Коши к нулю в пространствах типа $(S^{\beta}_{1/q})'$. Примером такого уравнения является уравнение

$$\left(D^1_t - \sum_{i=1}^{n}(x_i D^1_{y_i} + y_i D^1_{z_i}) - a\Delta_x\right)u(t, X) = 0, \tag{7}$$

где $a > 0$, $\Delta_x \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} D^2_{x_i}$, относящееся к уравнениям второго порядка типа уравнения диффузии с инерцией. Поскольку, как можно показать, ф. р.

уравнения удовлетворяет условию Λ_β^+ с $\beta = 1/2$ и функцией $a(t, \tau) = (t - \tau)^{1/2}$, то задача Коши в полупространстве $t > t_0$ для (7) в силу теоремы 1 однозначно разрешима в пространстве начальных данных $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Теорема 3. В классе обобщенных функций f из $(S_{1/2}^{1/2})'$, удовлетворяющих условию

$$\langle f, \varphi\rangle \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in S_{1/2}^{1/2}: \varphi(Y) \geqslant 0, \quad Y \in \mathbb{R}^{3n},$$

существование нулевого обобщенного шарового предельного среднего является необходимым и достаточным для стабилизации решения задачи Коши для уравнения (7) к нулю в пространстве $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Отметим, что при доказательстве необходимости используется явный вид ф. р. уравнения (7), найденный в работе [7], а также то, что для положительной обобщенной функции f из $(S_{1/2}^{1/2})'$ существует мера μ, определенная на σ-алгебре борелевских множеств из $\mathbb{R}^{3n}$, такая, что

$$\forall \varphi \in S_{1/2}^{1/2}: \langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \varphi(Y)\, d\mu(Y),$$

причем $\int_{\mathbb{R}^{3n}} \exp\{-a\|Y\|^2\}\, d\mu(Y) < +\infty$ для любого $a > 0$ (см. [8]).

Если отказаться от условия положительности f, то может быть справедлива следующая теорема.

Теорема 4. В классе обобщенных функций f из $(S_{1/2}^{1/2})'$, удовлетворяющих условию

$$\forall \varphi \in S_{1/2}^{1/2}\ \exists c_\varphi > 0: \forall Y \in \mathbb{R}^{3n} \ |(f * \varphi)(Y)| \leqslant c_\varphi, \tag{8}$$

$M_{F_1^3}^\infty(f) = 0$ — необходимое и достаточное условие стабилизации решения задачи Коши для уравнения (7) к нулю в пространстве $(S_{1/2}^{1/2})'$.

Достаточность сформулированного условия следует из теоремы 2. При доказательстве необходимости существенно используется тауберова теорема Винера [9]. Заметим также, что если обобщенная функция f из пространства $(S_{1/2}^{1/2})'$ положительна, то для нее условие (8) выполняется. Вопрос же о необходимом и достаточном условии стабилизации решения задачи Коши для уравнения (7) (а также (1)) к нулю во всем классе единственности остается открытым.

При более сильных ограничениях на начальную обобщенную функцию можно говорить о стабилизации решения задачи Коши (1), (2) к нулю в обычном смысле.

Теорема 5. Пусть ф. р. уравнения (1) удовлетворяет условию Λ_β^+. Если обобщенная функция f из $(S_{1/q}^{\nu})'$, $\nu > 1$, имеет компактный носитель, то решение $u(t, X)$, $(t, X) \in \Pi_{(t_0, +\infty)}$, задачи Коши (1), (2) с начальной функцией f стабилизируется к нулю при $t \to \infty$ равномерно на каждом компакте $K \subset \mathbb{R}^{3n}$.

Ввиду громоздкости доказательства этой теоремы наметим лишь его основные этапы. Пусть $\operatorname{supp} f \subset K_1 \subset K_2$, где K_1, K_2 — некоторые компактные множества в $\mathbb{R}^{3n}$. Рассмотрим функцию $\varphi \in S_{1/q}^{\nu}$, такую, что $\operatorname{supp} \varphi \subset K_2$ и $\varphi = 1$ на K_1 (такая функция существует, ибо при $\nu > 1$ в пространстве $S_{1/q}^{\nu}$ имеются финитные функции [3]). Поскольку функции $\varphi(\cdot)\, Z(t, X;\ t_0, \cdot)$ и $(1 - \varphi(\cdot))\, Z(t, X;\ t_0, \cdot)$ при каждых фиксированных $(t, X) \in \Pi_{(t_0, +\infty)}$ принадлежат пространству $S_{1/q}^{\nu}$, то на основании линейности f имеем

$$u(t, X) = \langle f, \varphi(\cdot)\, Z(t, X;\ t_0, \cdot)\rangle + \langle f, \chi(\cdot)\, Z(t, X;\ t_0, \cdot)\rangle, \quad (t, X) \in \Pi_{(t_0, +\infty)}, \tag{9}$$

где $\chi \equiv 1 - \varphi$. Так как $\operatorname{supp}(\chi(\cdot)\, Z(t, X;\ t_0, \cdot)) \cap \operatorname{supp} f = \varnothing$, то из равенства (9) и линейности f получаем формулу

$$u(t, X) = [a(t, t_0)]^{-\delta} \langle f, [a(t, t_0)]^{\delta}\, \varphi(\cdot)\, Z(t, X;\ t_0, \cdot)\rangle, \ (t, X) \in \Pi_{(t_0, +\infty)},$$

где δ возьмем так, чтобы $0 < \delta < (6b + 3)\, n$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что совокупность функций

$$g_{t,X}(\Lambda) \equiv [a(t, t_0)]^{\delta}\, \varphi(\Lambda)\, Z(t, X;\ t_0, \Lambda), \quad \Lambda \in \mathbb{R}^{3n},$$

ограничена в пространстве $S^{\nu}_{1/q}$ равномерно по t, для достаточно больших значений t и $X \in K$, т. е.

$$|D^m_{\Lambda} g_{t,X}(\Lambda)| \leqslant c \prod_{j=1}^{3n} B_j^{m_j} m_j^{m_j \nu} \exp\{-a\|\Lambda\|^q\}, \quad \Lambda \in \mathbb{R}^{3n}, \quad m \in \mathbb{Z}^{3n}_{+}, \qquad (10)$$

где постоянные c, a, B_j, $j \in \{1, \ldots, 3n\}$, не зависят от параметров t и X, изменяющихся указанным образом. Поскольку $g_{t,X} = 0$ на $\mathbb{R}^{3n} \setminus K_2$, то (10) достаточно доказать для $\Lambda \in K_2$.

Используя далее формулу дифференцирования произведения двух функций и условие Λ^{+}_{β}, получаем требуемую оценку.

Для иллюстрации последней теоремы рассмотрим непрерывную вне нуля функцию

$$f(X) = \begin{cases} \exp\{\|X\|^{-\omega}\}, & \omega > 0, \quad X \neq 0, \quad \|X\| \leqslant 1, \\ 0, & \|X\| > 1, \quad X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Известно, что f допускает регуляризацию в пространстве $(S^{\beta,\beta,\beta}_{1/q,1/q,1/q}(\mathbb{R}^3))'$, где $1 < \beta < 1 + 1/\omega$. Следовательно, существует единственное решение задачи Коши для уравнения (1) ($n = 1$) с начальной функцией f в полупространстве $t > t_0$, которое при $t \to +\infty$ стремится к нулю равномерно на каждом компакте $K \subset \mathbb{R}^3$.

1. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 444 с.
2. *Эйдельман С. Д., Малицкая А. П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения.— 1975.— 11, № 7.— С. 1316—1330.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М. : Физматгиз, 1958.— 274 с.
4. *Івасишен С. Д., Андросова Л. М.* Принцип локалізації для розв'язків деяких вироджених параболічних рівнянь // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями.— Чернівці, 1990.— С. 48—61.
5. *Репников В. Д.* Некоторые теоремы о стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений // Докл. АН СССР.— 1963.— 148, № 3.— С. 527—530.
6. *Дрожжинов Ю. Н.* Стабилизация решений обобщенной задачи Коши для ультрапараболического уравнения // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1969.— 33, № 2.— С. 368—379.
7. *Ейдельман С. Д., Івасишен С. Д., Тичинська Л. М.* Про структуру фундаментального розв'язку задачі Коші для одного модельного ультрапараболічного рівняння // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями.— Чернівці, 1990.— С. 32—40.
8. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа.— М. : Физматгиз, 1961.— 387 с.
9. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения.— М. : Физматгиз, 1963.— 256 с.

Ин-т прикл. проблем математики
и механики АН Украины (Черновиц. отдел),
Черновиц. ун-т

Получено 10.10.90